

2014中国西部数学邀请赛竞赛试题

2014 中国西部数学邀请赛

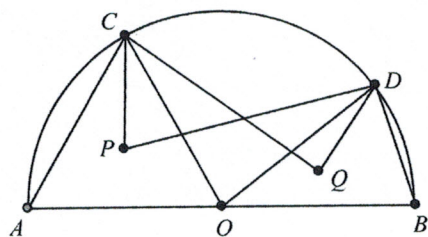
重庆

第一天 8月16日 上午 8:00~12:00

每题 15 分

1. 设 x, y 是正实数, 求 $x + y + \frac{|x-1|}{y} + \frac{|y-1|}{x}$ 的最小值. (岑爱国、顾滨供题)

2. 如图, AB 是半圆 O 的直径, C, D 是 AB 上两点, P, Q 分别是 $\triangle OAC$ 与 $\triangle OBD$ 的外心. 证明: $CP \cdot CQ = DP \cdot DQ$. (何忆捷供题)



3. 设 $A_1, A_2, A_3, \dots$ 是一列集合, 满足: 对任意正整数 j , 只有有限多个正整数 i , 使得 $A_i \subseteq A_j$. 证明: 存在一列正整数 $a_1, a_2, a_3, \dots$, 使得对任意正整数 i, j , $a_i | a_j$ 当且仅当 $A_i \subseteq A_j$. (瞿振华供题)

4. 给定正整数 n , 设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是非负整数序列, 若其中连续若干项 (可以只有一项) 的算术平均值不小于 1, 则称这些项组成一条“龙”, 其中第一项称为“龙头”, 最后一项称为“龙尾”. 已知 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 中每一项都是“龙头”或者“龙尾”, 求 $\sum_{i=1}^n a_i$ 的最小值. (邹瑾供题)

2014 中国西部数学邀请赛

重庆

第二天 8月17日 上午 8:00~12:00

每题 15 分

5. 给定正整数 m , 证明: 存在正整数 n_0 , 使得对所有正整数 $n > n_0$, $\sqrt{n^2 + 817n + m}$ 的十进制表示的小数点后第一位数字都相同. (冯志刚供题)

6. 给定整数 $n \geq 2$, 设实数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 满足:

$$(1) \sum_{i=1}^n x_i = 0;$$

$$(2) |x_i| \leq 1, i = 1, 2, \dots, n.$$

求 $\min_{1 \leq i \leq n-1} |x_i - x_{i+1}|$ 的最大值. (冷岗松供题)

7. 平面上, 点 O 是正三角形 ABC 的中心, 点 P, Q 满足 $\overline{OQ} = 2\overline{PO}$. 证明:

$$PA + PB + PC \leq QA + QB + QC. \quad (\text{羊明亮供题})$$

8. 给定实数 q , 满足 $1 < q < 2$, 定义数列 $\{x_n\}$ 如下: 设正整数 n 的二进制表示为

$$n = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + \dots + a_k \cdot 2^k, \quad a_i \in \{0, 1\}, i = 0, 1, \dots, k,$$

令

$$x_n = a_0 + a_1 \cdot q + a_2 \cdot q^2 + \dots + a_k \cdot q^k.$$

证明: 对任意正整数 n , 存在正整数 m 使得 $x_n < x_m \leq x_n + 1$. (陈永高供题)