2012 中国西部数学邀请赛

内蒙古　呼和浩特

第一天　9 月 28 日 上午 8：00~12：00

每题 15 分

1．求最小的正整数 m，使得对任意大于 3 的质数 p，都有

$$105 \mid 9^{p^2}-29^p+m.$$

2．证明：在正 $2n-1$ 边形 $(n\geq 3)$ 的顶点中，任意取出 n 个点，其中必有 3 个点，以它们为顶点的三角形为等腰三角形.

3．设 E 是一个给定的 n 元集合，$A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是 E 的 k 个两两不同的非空子集，满足：对任意的 $1\leq i<j\leq k$，要么 A_i 与 A_j 的交集为空集，要么 A_i 与 A_j 中的一个是另一个的子集．求 k 的最大值.

4．已知点 P 为锐角 ΔABC 内部任意一点，点 E，F 分别为 P 在边 AC，AB 上的射影．BP、CP 的延长线分别交 ΔABC 的外接圆于点 B_1、C_1，设 ΔABC 的外接圆和内切圆的半径分别为 R 和 r．求证：$\dfrac{EF}{B_1C_1}\geq\dfrac{r}{R}$，并确定等号成立时点 P 的位置.

2012 中国西部数学邀请赛

内蒙古　呼和浩特

第二天　9 月 29 日 上午 8：00~12：00

每题 15 分

5．在锐角ΔABC中，H是垂心，O是外心（A、H、O三点不共线），点D是A在边 BC 上的射影，线段AO的中垂线交直线BC于点E．求证：线段OH的中点在ΔADE的外接圆上．

6．设数列$\{a_n\}$满足$a_0=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=a_n+\dfrac{a_n^2}{2012}$，$n$=0，1，…，求整数$k$，使得$a_k<1<a_{k+1}$．

7．一张$n\times n$的方格表，称有公共边的方格是相邻的．开始时每个方格中都写着+1，对方格表进行一次操作是指：任取其中一个方格，不改变这个方格中的数，而将所有与这个方格相邻的方格中的数都改变符号．求所有的正整数$n\geq 2$，使得可以经过有限次操作，将所有方格中的数都变为-1．

8．求所有的质数p，使得存在无穷多个正整数n，满足$p\,|\,n^{n+1}+(n+1)^n$．